ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - Session 1987 — 2ème épreuve de **Mathématiques**

Durée : 2 H

Cette épreuve est destinée aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales M, P, P', T, TA, TB.

Lors de la correction de l'épreuve, il sera tenu compte :

- de la clarté de la rédaction
- de la rigueur des raisonnements
- du choix de la solution proposée.

L'utilisation des calculatrices est autorisée.

- I -

1) On considère l'équation différentielle (E_1)

$$(E_1) \qquad t y''(t) + 2y'(t) + t y(t) = 0$$

où y (t) est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

a) Montrer que (E_1) admet des solutions développables en série entière

$$yo(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Préciser les coefficients de la série et le domaine de convergence

b) Expliciter les solutions yo (t) à l'aide de fonctions élémentaires.

2) On considère l'équation différentielle (E_2)

$$(E_2) \qquad t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - \tfrac{1}{4}) x(t) = 0$$

où x (t) est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$

a) On effectue le changement de fonction $x(t) = \sqrt{t}\, u(t)$

où u (t) est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u (t)

b) En déduire la solution particulière $J_{\frac{1}{2}}(t)$ de (E_2) telle que

$\dfrac{J_{\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t}}$ tende vers $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ lorsque t tend vers zéro.

c) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \dfrac{d}{dt}\left[\sqrt{t}\, J_{\frac{1}{2}}(t)\right]$ est une autre solution particulière de (E_2) notée $J_{-\frac{1}{2}}(t)$

d) En déduire la solution générale de (E_2)

- II -

On se propose de rechercher des fonctions

$u : (x, y, t) \longmapsto u(x, y, t)$ deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, vérifiant l'équation:

$$(E_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu$$

où a, b, c sont trois constantes réelles.

1) On effectue le changement de variables $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$ et on pose $u(x, y, t) = v(r, \theta, t)$

Montrer que (E_3) se transforme en une équation (E_4) de la forme :

$$(E_4) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \alpha(r)\cdot\frac{\partial v}{\partial r} + \beta(r)\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b\frac{\partial v}{\partial t} + cv$$

où $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ sont deux fonctions de r, que l'on déterminera.

2) On cherche des solutions particulières de (E_4) sous la forme

$$v(r, \theta, t) = R(r).\varphi(\theta).T(t)$$

a) Montrer que des conditions suffisantes pour que v (r, θ, t) soit solution de (E_4) sont que T (t) et $\varphi(\theta)$ soient solutions d'équations de la forme :

$$(E_5) \qquad \frac{1}{a^2} T''(t) + b T'(t) + (c + \lambda^2) T(t) = 0$$

$$(E_6) \qquad \varphi''(\theta) + \mu^2 \varphi(\theta) = 0$$

où λ et μ sont des constantes réelles arbitraires.

b) Déterminer l'équation (E_7) vérifiée par R (r)

3) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$

a) Déterminer les solutions générales de (E_5), (E_6), (E_7)

b) En déduire des solutions de (E_4) et (E_3)

4) Résoudre (E_7) lorsque $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$

• • •